

ЧИСЛА В ТРИАДОЛОГИИ
20 тезисов о патристической «теории множеств»

Numbers in the Triadology:
Twenty Theses about the Patristic “Set Theory”

Summary

The main ideas of the “Cappadocian” approach are the following:

1. Ternary exclusive OR,
2. Paraconsistent ordered pair,
3. Paraconsistent set of paraconsistent ordered pairs,
4. An analogue of the Foundation axiom.

Множества, множества, множества, множества...

А. Ведель, религиозно-историческое песнопение

0. **Математическая логика в богословии.** Христианское учение о Боге постоянно оперирует числами (один, два, три, множество, бесконечность...) и другими понятиями, встречающимися в логике вообще и в математической логике в частности. Это не означает, что богословие превращается в математику, но это означает, что некоторые фундаментальные для математики категории имеют какое-то — отчасти эксплицитное, отчасти имплицитное — осмысление и в христианском богословии. Эти категории относятся именно к математике вообще, а не к тем или иным конкретным математикам из всего разнообразия возможных математик (ср. Priest 2006; 2013). Современные представления о математическом плюрализме заставляют отнестись к этому категориальному аппарату серьезно и постараться выяснить, какие логические интуиции и концепции за ним стоят.
1. **Возможность существования решения у поставленной задачи:** Традиционный язык патристики — язык аристотелевых категорий, которые соединяются «не в том» порядке и от этого получают «не то» значение. Те же самые категории эквивалентны в современной логике представлениям о классах (ниже мы не будем вводить различия между классами и «множествами», т.к. оно появилось только тогда, когда возникла задача выделения классов, свободных от парадоксов внутри классической логики).
2. **Необходимость найти такое решение:** Экспликация на языке современной культуры логических теорий, использовавшихся для формулировки христианской догматики.
3. **Уточнение первоначальной формулировки проблемы:** если исходить из эквивалентности понятия οὐσία понятию класса и понятия ὑπόστασις понятию «элемент класса», то как следует представить соответствующую «теорию множеств»? Какова будет ее аксиоматика? Мы ограничиваем эту задачу тем, что называется на языке патристики θεολογία, т.е. учение о Боге-Троице, не пытаясь оценивать приложимость соответствующего категориального аппарата к тварным сущностям и ипостасям (хотя в дальнейшем надо бы заняться и этим).
4. **Выбор моделей для формализации:** сначала триадология Каппадокийцев и Дионисий Ареопагит, а потом уже все прочие варианты, в которые вмещались (разные!) христологии.
5. **Базовые обозначения:** не зная заранее, как интерпретировать каппадокийскую «арифметику» на современном языке, мы будем держаться аутентичных обозначений (терминологии), то есть использовать термины «едИница» (1), «двоица» (2) и «троица» (3) для заведомо бесконечных объектов — в духе известной формулы μονὰς ἀπ’ ἀρχῆς εἰς δυάδα κινήθεῖσα, μέχρι τριάδος ἔσται «едИница от начала в двоицу подвигнувшись, на троице остановилась» (Григорий Богослов, *Слово* 29, 2).

Для удобства дальнейшего изложения запишем эту формулу более кратко (и заодно отвлечемся от ее точного грамматически и лексически выражения, которое тут не обязательно и слегка менялось даже у самого Григория Богослова):

$$(5.1) 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

Знак $\rightarrow$ в данном случае не имеет никакого логически определенного смысла, а означает лишь последовательность элементов в словесной формуле Григория Богослова.

6. **Эксплицитная парадоксальность** каппадокийской «арифметики» в рамках классической логики:

$$(6.1) \quad 1 + 1 + 1 = 1 \text{ (три ипостаси – это единый Бог).}$$

Эта парадоксальность может быть кажущейся (полностью или частично), т.к. для получения подобных свойств логических объектов не обязательно прибегать к параконсистентной логике — по крайней мере, теоретически тут может быть шанс обойтись лишь минимальным и имплицитным нарушением консистентности, наподобие того, как это происходит в так называемых консистентных теориях множеств (ZF, NBG, NF...). Впрочем, без очевидной параконсистентности вряд ли обойдется, но задача будет в том, чтобы найти для нее строго определенное место.

7. **Схемы радикального устранения парадоксальности** были солидарно отторгнуты всеми конфессиями. Это схемы Иоанна Филопона (7.1) и Дамиана Александрийского (7.2):

$$(7.1) \{1\} + \{1\} + \{1\} = 3$$

$$(7.2) \{1\} = 1$$

Иоанн Филопон (7.1): каждая ипостась является синглетоном своей собственной природы.

Дамиан (7.2): различие ипостасей не является реальным различием (можно назвать это учение новой артикуляцией савеллианства и т.п., что и было сделано критически настроенными современниками).

Вся остальная пост-каппадокийская триадология развивалась, исходя из необходимости эту эксплицитную парадоксальность (6.1) сохранить.

8. **Общая формулировка:** Бог единственен для своей сущности, поэтому он образует синглетон (множество, имеющее только один член; это заведомо парадоксальный логический объект, сама идея множества предполагает множество объектов, а не единичный объект; см. Лесневский; Д. Льюис); но, в то же время, три ипостаси – это три элемента множества, образуемого сущностью Божией. Получаем внешне парадоксальную формулу:

$$(8.1) \{1, 1, 1\} = \{1\}$$

9. **Порядковость, упорядоченность и субординация.** Интерпретация формулы (5.1) с помощью формулы (8.1) будет заведомо некорректной, но полезной в качестве некоторого первого приближения — как и сама формула (5.1), если ее понимать буквально, заведомо некорректна: в этой формуле эксплицитована субординация ипостасей, но в реальности никакой субординации нет, и таков просто недостаток данной модели. Рассмотрим, однако, модель (5.1), делая вид, будто субординация есть: будто в Троице является сначала первая ипостась, потом вторая, потом третья. При таком подходе и с учетом того, что объекты, упомянутые в (8.1), бесконечны, мы имеем в формуле (8.1) выражение для кардинальности суммы трех бесконечных трансфинитных чисел: количество элементов бесконечного счетного множества всегда

равно бесконечному кардинальному числу $\aleph_0$ — независимо от того, с суммой какого количества бесконечных порядковых чисел мы имеем дело. Так, кардинальность (количество элементов) порядкового трансфинитного числа ω равна кардинальности порядкового трансфинитного числа, равного сумме $\omega + \omega + \omega$ и составляет кардинальное число $\aleph_0$. Это свойство не является параконсистентным (по крайней мере, в том смысле, в котором традиционные теории множеств считаются консистентными) и выявляется средствами классической логики применительно к бесконечным множествам: при условии сохранения счетности (а для триадологии использовались только счетные модели), бесконечные множества могут возрастать только как порядковые числа, а число элементов (кардинальность) всегда будут оставаться постоянным (см. определение счетного множества в любом учебнике; оно было дано Дедекиндом).

То, что определяет формула (5.1), это именно порядковость, которая только и позволяет добавить к бесконечному порядковому числу ω сначала 1 (т.е. первый элемент), потом 2 (второй элемент), потом 3 — и так до элемента за бесконечным порядковым номером ω . Получается, что порядковые числа продолжают за пределами ряда натуральных чисел. Уже порядковое число ω , по определению, больше любого числа натурального ряда, а порядковые числа $\omega + 1 \dots + \omega + \dots$ — еще больше.

Зрительно это можно пояснить так: есть некая бесконечная прямая с числами натурального ряда; на эту же прямую ни одного нового порядкового числа уже не добавить; но можно начать новый ряд — тоже до бесконечности — рядом с этой прямой, а потом рассмотреть множество, образованное обоими рядами... Однако с порядковыми числами, в отличие от картинок, начать новый ряд (новую прямую) можно только тогда, когда первый ряд пройден целиком. Дело в том, что понятие порядка, следующего после бесконечного ряда чисел, задать можно, а вот параллельный ряд других чисел задать нельзя: у нас есть только одно единственное число 1, одно число 2 и т.д. Впрочем, рассматривать выражения вида $2 \neq 2$ можно в параконсистентной логике, и мы к этому еще вернемся (в п. 14).

Итак, смысл формулы (5.1), осмысленной через формулу (8.1), может быть выражен формулой (9.1); подчеркиваем, что эта формула не будет выражать смысла каппадокийской триадологии в целом, а будет важна только для одного аспекта:

$$(9.1) \text{Card}(\{1, 1, 1\}) = 1$$

В словесном выражении: кардинальность упорядоченного множества $\{1, 1, 1\}$ равна 1. Или, другими словами: количество элементов Троицы будет равно единице, если различие ипостасей понимать как различие порядковое. Или, еще другими словами: троичность не нарушает единственность Бога, если между ипостасями имеется определенный порядок, то есть слова «первая ипостась», «вторая ипостась», «третья ипостась» (Троицы) несут какой-то онтологический смысл, а не являются лишь ошибками автора учебника православной догматики, который слишком много списывал у католиков.

10. **МонархИя Отца.** Начинаем постепенно переходить от модели (5.1) к моделям без субординации. В них, однако, всегда будет сохраняться принцип единого начала в Троице — *μοναρχία* Отца. Если возможность называть Сына «вторым», а Духа «третьим» была дискуссионна (особенно в православно-латинской полемике о *Filioque*), то именование Отца «первым» никогда не вызывало споров. Это означает, что корректная логическая модель, имплицитованная (точнее, эксплицитованная, но не на современном логическом языке) в триадологии Каппадокийцев все-таки учитывает необходимость порядковости в порождении троичности из единицы. Поэтому свободная от субординации модель не будет свободна от идеи порядковости. Вопрос лишь в том, в каком виде будет эта порядковость.

11. **Невозможность аксиомы парности и, следовательно, такой аксиомы бесконечности, из которой можно было бы вывести аксиому парности.** Теперь мы попадаем на развилку между искомой «теорией множеств» и — сразу — всеми существующими в современной математической логике теориями множеств, с одной стороны, и триадологиями, задающими жесткий порядок ипостасей, с другой. Все существующие современные теории множеств эксплицитно или имплицитно включают Axiom of Pairing (необязательно в качестве независимой аксиомы):

$$(11.1) \forall x \forall y \exists z \forall w [w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y)]$$

Словами: для любых множеств существует такое множество (z), все члены которого будут только эти самые x и y . Иначе говоря, пара любых множеств также образует множество. При этом само представление о бесконечности в известных теориях множеств — аксиома бесконечности (Axiom of Infinity) — имплицитно подразумевает понятие пары:

$$(11.2) \exists \mathbf{I} (\emptyset \in \mathbf{I} \wedge \forall x \in \mathbf{I} ((x \cup \{x\}) \in \mathbf{I}))$$

Словами: существует такое множество $\mathbf{I}$ — постулируемое бесконечным, — которое включает в качестве членов пустое множество и любые множества x , но таким образом, что множество, образованное объединением каждого множества x с синглетоном, включающим в качестве своего единственного члена то же самое множество, будет также членом множества $\mathbf{I}$. Другими словами: чтобы быть бесконечным, множество должно включать пустое множество и такие множества-элементы, которые, будучи объединенными со своими собственными синглетами, также образовывали бы элементы этого множества. Понятие объединения множеств также имплицитно связано с аксиомой парности (11.1), т.е. основано на том, что множество, составленное из двух множеств, будет также множеством.

В каппадокийской триадологии множество, составленное из двух ипостасей, не будет ничем. Это просто запрещенная правилами конструкция. Поэтому тут надо либо расходиться с теми путями мышления, которые типологически сходны с позднейшими теоретико-множественными подходами, либо поправить что-то в самой триадологии, внося в триадологию каппадокийцев дополнительные аксиомы.

12. **Варианты внесения дополнительных аксиом.** Они все предполагают выделение в левой части равенства (6.1) какой-либо пары, то есть

$$(12.1) (1 + 1) + 1 = 1$$

Исторически известные варианты — это *Filioque* в редакции франкских богословов (*Libri Carolini*) (пары образуют параллельно Отец и Дух и Сын и Дух, т.к. Дух происходит от каждого из них: $(((1 + 1) \cup (1 + 1)) = 1)$), *Filioque* в редакции Лионского собора 1274 г. (*tanquam ab uno principio*: Дух исходит от Отца и Сына «как от единого начала»; подразумевается не параллельное, а последовательное исхождение Духа от Отца через Сына), эфиопское учение XVII–XIX веков *Qabat* («Помазание»): Сын рождается через Духа, который исходит от Отца (зеркальное отражение *Filioque* Лионского собора). Авторы всех этих теорий не мыслили появления троицы, минуя процесс образования пар. Тем самым они вносили дополнительную субординацию в Троицу (вместо того, чтобы «снимать» субординацию, уже внесенную принципом монархии Отца), но зато предвосхитили идеи математиков и логиков, начиная от Дедекинда и Кантора и кончая нашими современниками.

13. **Тернарная эксклюзивная дизъюнкция.** Без внесения дополнительных аксиом необходимо понимать каппадокийскую триадологию как построенную не на итерации процесса образования пары, а на тернарной элементарной операции. Об этом подробно: Loug   2013; Лурье 2014. Коннектив, связывающий три ипостаси, — особый вид эксклюзивной дизъюнкции, отличающийся от обычной эксклюзивной дизъюнкции,

а именно, тернарная эксклюзивная дизъюнкция ($\vee^3$) «только один из трех» (только одна из трех ипостасей — Отец, только одна — Сын, только одна — Дух, и никаких пар из них слепить нельзя). Здесь выбор делается сразу из трех вариантов, а не итерацией выбора из пар, как предполагала бы обычная эксклюзивная дизъюнкция.

Свойства этого коннектива отличаются от свойств обычной эксклюзивной дизъюнкции любой арности при любой нечетной арности, начиная с трех (для выбора из двух, т.е. для арности, равной двум, обычная эксклюзивная и строгая эксклюзивная дизъюнкции неотличимы). При арности, равной трем, проявляется следующее различие между обычной эксклюзивной и строгой эксклюзивной дизъюнкциями: для трех пропозиций со значениями истинности «истинно» обычная эксклюзивная дизъюнкция, представляющая собой итерацию попарного выбора (истинно только одна из двух пропозиций, а не обе), даст также значение «истинно» (для первой пары будет значение «ложно», но затем получится пара из этого «ложно» и третьего «истинно», что в итоге даст «истинно»), тогда как строгая эксклюзивная дизъюнкция (выбор точно только одного из всех вариантов, то есть подразумевающая возможность истинности только для одной из трех пропозиций) даст значение «ложно».

В Троице пропозиции типа

(13.1) «данная ипостась есть или Отец, или Сын, или Дух»

разделяются именно строгой эксклюзивной дизъюнкцией, т.к. абсурдное утверждение

(13.2) «данная ипостась есть одновременно и Отец, и Сын, и Дух»

интерпретируется правильно, только если понимать «или» в (13.1) как строгую эксклюзивную дизъюнкцию. В таком случае (13.2) сразу отвергается как ложное высказывание, т.к. любая одна из трех ипостасей может быть или только Отцом, или только Сыном, или только Духом. При этом никаких новых ложных утверждений относительно ипостасей не возникает.

Если же мы будем опровергать (13.2) на основе обычной эксклюзивной дизъюнкции, подразумевающей итерацию выбора из пары, то нам удастся опровергнуть (13.2) только ценой утверждения другого абсурдного результата.

Рассмотрим два этапа итерации выбора из пары: (1) «данная ипостась есть и Отец, и Сын» — «ложно» (т.к. обычной эксклюзивная конъюнкция также не допускает, чтобы сразу обе пропозиции из одной пары были истинными); (2) «данная ипостась, которая не есть сразу и Отец, и Сын [см. этап (1)], есть Дух» — «истинно» (ложность первой пропозиции была только что установлена, но, согласно обычной эксклюзивной дизъюнкции, вторая пропозиция из той же пары тогда обязана быть истинной: если ложно, что некая ипостась *сразу* и Отец, и Сын, то тогда, якобы, должно быть истинным, что она — Дух). Получили абсурдный результат, т.к. на самом деле никакая ипостась не есть сразу и Отец и Сын, поэтому утверждение, будто она — именно Дух, а не любая из трех ипостасей, является абсурдным.

Специфические свойства строгой эксклюзивной дизъюнкции впервые описал Эмиль Пост в своей общей классификации коннективов (1941 г.), но его работы почти не привлекли внимания. В 1980-е годы о Посте вспомнили, но не те логики, которые интересовались теорией множеств.

Принципиальное отличие итерации процесса выбора из пары (то есть применения обычной эксклюзивной дизъюнкции арности 3 и выше) и процесса выбора сразу из всего набора возможностей (то есть применения строгой эксклюзивной дизъюнкции) в том, что первая процедура имеет начало и создает порядок шагов, тогда как последняя процедура — одномоментная и никакого порядка не создает: из числа n вариантов

эсклюзивного выбора нельзя назначить первого, второго и т.д., тогда как для итераций выбора из пар такой порядок задается самим процессом итерации.

Применительно к Троице это означает, что даже монархия Отца не создает в ней порядка (если не вводить дополнительных аксиом, описанных в п. 12). Севириан Гавальский сформулировал это в своем знаменитом определении:

(13.3) οὐκ ἔχει τάξιν ἡ θεῖα φύσις, οὐχ ὡς ἄτακτος ἀλλ' ὡς τάξιν ὑπερβαίνουσα

(«Не имеет порядка божественная природа, не потому что беспорядочная, а потому, что превосходит порядок»; под именем Иоанна Златоуста, *Беседа на Быт. 24,2*, § 2; PG 56, 555).

14. МонархИя Отца и порождение параконсистентных упорядоченных пар.

Вернемся к понятию монархии Отца, то есть Отца как «единого начала» в Троице. Единственное различие между «происходящими» от Отца ипостасями Сына и Духа — это бинарные отношения, называемые «рождение» и «исхождение», которые определены только относительно друг друга посредством постулирования того, что это разные отношения, а не одинаковые. Как рождение, так и исхождение — это образование **упорядоченной пары**, где Отец выступает в качестве первого элемента пары (монархИя Отца).

Упорядоченная пара — это фундаментальное понятие, выражающее идею порядка и упорядоченности. Понятие упорядоченной пары ввел в 1914 г. Винер и почти тогда же, независимо от него, Хаусдорф, а современное общепринятое определение дано Куратовским (1921 г.) (определения Винера и Хаусдорфа не содержали принципиальных для нас отличий):

$$(14.1) (a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Это определение того, как в теоретико-множественной трактовке нужно понимать, что b следует после a . Например, порядковое число 2 (т.е. «второй») будет содержать порядковые числа 1 и 2 («первый» и «второй»). Это верно и для бесконечных (трансфинитных) чисел: так, число $\omega + \omega$ будет содержать числа ω , $\omega + 1$ и т.д.

Если бы «рождение» и «исхождение» означали бы образование упорядоченных пар в смысле (14.1), то формула (5.1), относительно «движения монады», была бы верна в буквальном смысле, а между ипостасями существовала бы последовательность, описанная выше в п. 9, а именно, возникала бы возможность сравнения ипостасей с порядковыми трансфинитными числами — так, чтобы, например, Сына сравнить с числом ω , а Дух — с числом $\omega + \omega$, то есть чтобы Дух, как следующий по порядку, был «больше» Сына.

Но, как мы уже знаем, для такой триадологии требуются дополнительные аксиомы (см. выше, п. 12), тогда как в каппадокийской триадологии упорядоченные пары образуются параллельно: Отец—Сын и Отец—Дух.

Эта схема только выглядит непарадоксальной. В средневековых рукописях можно встретить ее представление в виде графа, где из одной точки выходят два отрезка — две стороны равнобедренного треугольника, обозначающие рождение Сына и исхождение Духа. Но тут далеко не точная аналогия. Два отрезка состоят из разных точек, которые очевидным образом отличаются друг от друга. Между ипостасями, как и между числами, такого отличия нет. Ипостаси, подобно числам, не «состоят из» чего-то разного, а только из одного и того же. Поэтому как рождение, так и исхождение могут описываться одним и тем же определением (14.1), которое, таким образом, утрачивает свойства единственности. В нем появляются два разных вторых члена,

которые одинаково обозначаются b . Но, тем не менее, это все-таки разные вторые члены — хотя, в то же время, они и одинаковые.

Если бы мы имели дело с числами, то это выглядело бы как появление после единицы двух разных чисел 2, которые при этом были бы равны друг другу, и о их различии было бы нельзя сказать ничего, кроме того, что оно вполне реально и не исчезает, даже если закрыть один глаз.

Если настаивать в смысле любой консистентной логики, что $b = b$, то мы получим учение Дамиана Александрийского об онтологической идентичности всех трех ипостасей, а если настаивать на обратном, что $b \neq b$, то мы получим «тритеизм» Иоанна Филопона (см. выше, п. 7); правда, в обоих этих случаях следовало бы перестать обозначать обе части выражения одной и той же буквой. Более мягкие способы ухода от параконсистентности внесение в триадологию дополнительных аксиом (см. выше, п. 12). В самой Византии проблема параконсистентности при образовании упорядоченных пар «Отец—Сын» и «Отец—Дух» вызывала внутреннюю богословскую полемику (см. Loulié 2014 о Никифоре Влеммиде и спорах о его богословском наследстве — тезисе о происхождении Духа и Сына διὰ θατέρου θάτερον).

Но в параконсистентной логике мы можем вполне осмысленно утверждать, что $b \neq b$ (имея в виду, что обозначение обеих частей выражения одинаковой буквой подразумевает одновременно и $b = b$). Это можно записать в виде параконсистентной конъюнкции (14.2):

$$(14.2) \quad b \neq b \wedge b = b$$

Поскольку (14.2) все же предполагает $b \neq b$, то подобная параконсистентная логика не будет нарушать присутствующую в большинстве существующих теорий множеств аксиому экстенциональности¹:

$$(14.3) \quad \forall a \forall b [\forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b]$$

Словами: если для любых множеств a и b выполняется условие, что для любого множества x верно, что оно является членом множества a , если и только если оно является членом множества b , то множества a и b идентичны. Другими словами: если у разных множеств одинаковые члены, то сами эти множества идентичны. В частности, одинаковые числа всегда идентичны, т.е. не должно быть (согласно этой аксиоме) двух 2 или ω , которые не были бы идентичны друг другу.

Сформулируем в общем виде определение для параконсистентных упорядоченных пар, которых, в общем случае, может быть любое количество, причем, не обязательно счетное (т.к. любая идея числа может тем или иным образом пониматься как аналог счета и перечисления возможностей выбора, и аксиома выбора для этого не требуется):

$$(14.4) \quad (a, b) := \left\{ \{a\}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\omega \\ \vdots \\ b_R \end{pmatrix} \right\},$$

где $\underline{\vee}^R (b_1 \dots b_\omega \dots b_R)$, то есть эти элементы связаны между собой строгой эксклюзивной дизъюнкцией, порядок которой, в общем случае, определяется бесконечными числами, даже не обязательно предполагающими счетность. (Повторим,

¹ У Кантора понимание множества и трансфинитного числа не было вполне экстенциональным; см. Deiser 2010.

что всюду, где имеет смысл понятие числа, будет иметь смысл какой-то аналог понятия выбора).

Важная особенность определения (14.4) состоит в следующем. Индексы при b формально совпадают с обозначениями порядковых чисел (и поэтому, в частности, мы используем обозначение ω , а не $\aleph_0$), но в действительности не указывают ни на какой конкретный порядок. Это параконсистентное множество таких порядковых чисел, которые способны перестраиваться во всех возможных порядках. Но это не множество кардиналов, которые вовсе не имеют порядка. Наши «порядковые» числа абсолютно симметричны в отношении порядка, то есть приобретают порядок только в результате выбора, но этот выбор делается один раз, так что после «первого» уже не будет «второго» и т.д., поскольку следующая упорядоченная пара будет строиться параллельно и начинаться (и заканчиваться) своим собственным нарушением симметрии.

Для обозначения максимального числа будем использовать букву R – в память о Расселе и его «множестве всех множеств». В наших рассуждениях инконсистентность (противоречивость) никогда не сможет служить эквивалентом несуществования (вопреки тому, что обычно принимается в теориях множеств), и поэтому мы должны будем говорить о бесконечности в ее полном и, во всех смыслах — в том числе, нам неведомых, — бесконечном объеме, то есть в объеме «множества Рассела».

Все вторые члены упорядоченных пар (14.4), то есть $b_1 \dots b_R$, отличаются друг от друга только в смысле (14.2), а не в смысле консистентных логик, то есть они отличаются друг от друга, но при этом идентичны друг другу.

В частности, для триадологии определение (14.4) упрощается до (14.5):

$$(14.5) \quad (a, b) := \left\{ \{a\}, \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \right\},$$

где $\mathcal{U}^3(b_1, b_2, b_3)$. Словами: отношения между ипостасями имеют свойства тернарной эксклюзивной дизъюнкции. При этом индексы 1, 2 и 3 не имеют смысла порядковых чисел в обычном смысле этого слова, а являются такими исходно симметричными «порядковыми» числами, которые были описаны выше.

Обобщенное определение параконсистентной упорядоченной пары (14.4) не имеет прямого отношения к триадологии, но окажется важным для понимания богословских концепций относительно множественности единственного Бога, — а поэтому будет все-таки важным и для триадологии.

15. Упорядоченные пары в условиях строгой эксклюзивной дизъюнкции.

Образование упорядоченных пар определяет некий порядок, и поэтому не может приводить к соединению трех элементов по принципу строгой эксклюзивной дизъюнкции, в котором всякая идея первенства, а значит, и порядка отрицается. Напротив того, в классической логике упорядоченные пары должны как-то коррелировать с обычной эксклюзивной конъюнкцией. Но в нашем случае постулировано то, что хотя упорядоченные пары образуются, но приводят они вовсе не к порядку, а к эксклюзивной конъюнкции. Порядок, таким образом, заканчивается, едва успев начаться. — Заканчивается, но не отменяется.

Порядок не отменяется в том смысле, что упорядоченные пары упорядочиваются в обе стороны сразу. На языке определения (14.5) это означает, что каждая из ипостасей может становиться значением переменных a и b_1 , b_2 и b_3 . Это буквально выражено в определении Севириана Гавальского (13.3), которое (под именем Иоанна Златоуста)

цитируют и поздние византийские Отцы. На еще более традиционном языке это выражается тогда, когда идиома (одна) ипостаси Отца определяется как «нерожденность» и «неисходность», то есть как обратные определения к идиомам Сына и Духа (этот способ выражения, однако, оставляет неясными отношения между Сыном и Духом).

Мы можем теперь эксплицировать еще одно свойство упорядоченных пар в Троице, которое и служит для Троицы параконсистентным аналогом непротиворечивого определения Куратовского (14.1):

$$(15.1) \quad (a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\} \wedge \{\{b\}, \{b, a\}\}$$

Это определение параконсистентного (точнее, диалектического: подразумевающего контрадикторное противоречие, а не контрарное) аналога упорядоченной пары. Оно подразумевает, что упорядоченность в упорядоченной паре существует, но такая, что действует в обоих направлениях одновременно. Это такая идея порядка, в которой порядок, по слову Севириана Гавальского, не отсутствует, но «превзойден». С учетом (15.1) определение (14.4) приобретает вид (17.1) (см. ниже).

Разумеется, (15.1) подразумевает (15.2):

$$(15.2) \quad (a, b) \equiv (b, a)$$

То есть упорядочивание параконсистентных пар происходит сразу в обоих направлениях.

Разумеется, традиционные выражения типа «рождается» и «исходит» не вмещают смысла (15.1) и дают повод к тому, что мы называли дополнительными аксиомами (п. 12). Но поэтому эти традиционные термины и потребовали тех оговорок, которые появляются уже на рубеже IV и V веков, на заре каппадокийской триадологии.

16. **Троица как единица.** Поскольку все члены упорядоченных пар (14.5) не только параконсистентно различны, но и параконсистентно идентичны, то будет также корректно и согласно с аксиомой экстенциональности (14.3) считать все эти пары вырожденными, то есть соответствующими (16.1):

$$(16.1) \quad (a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$$

Все преобразования в (16.1) выполнены на основании аксиомы экстенциональности.

Само выражение (16.1) представляет собой фрагмент теоретико-множественного представления ряда натуральных чисел (0, 1, 2 ...):

$$(16.2) \quad \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\} \dots$$

Из (16.2) видно, что $\{\{a\}\}$ в (16.1) соответствует просто повтору единицы, то есть порядковому числу 2. Соответственно, $\{a\}$ будет выражением единицы.

Таким образом, мы завершили интерпретацию «формулы Троицы» (8.1) в рамках некоей параконсистентной теории множеств.

17. **Множественность божественных энергий.** Божественные энергии обладают бесконечной множественностью. Если говорить о Боге *ad extra*, то их количество соответствует количеству логосов Божиих во всем творении, а это то число, которое мы выше (п. 14) обозначили *R*. Если говорить о Боге *ad intra*, то энергии определяются как движения сущности внутри трех ипостасей, и это движение (разумеется, не нарушающее неподвижности, т.е. неизменности Бога, — поэтому неподвижное

движение) только одно, как одна сама сущность. Но, будучи единственным, оно троично — в том же смысле, в каком троична Божия сущность, и об этом смысле мы говорили выше.

Для энергий применимо общее определение параконсистентных упорядоченных пар (14.4). Они, то есть логосы Божии, оказываются вторыми членами пар. Первый член всегда один и тот же — единственная сущность Божия. Таким образом, определение (14.4) формулирует различие между сущностью и энергиями. С учетом (15.1) и (15.2) оно приобретает вид (17.1):

$$(17.1) \quad (a, b) \equiv (b, a) := \left\{ \{a\}, \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\omega \\ \vdots \\ b_R \end{Bmatrix} \right\} \wedge \left\{ \{b\}, \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\omega \\ \vdots \\ a_R \end{Bmatrix} \right\},$$

где

$$(17.2) \quad \bigvee^R (b_1 \dots b_\omega \dots b_R) \wedge \bigvee^R (a_1 \dots a_\omega \dots a_R) ,$$

то есть эти элементы связаны между собой строгой эксклюзивной дизъюнкцией, порядок которой соответствует «полной» и божественной бесконечности, условно названной нами R в честь «множества всех множеств» Рассела.

Определение (17.1) полезно еще и тем, что наглядно показывает тождество и различие между сущностью и энергиями: тождество выражено в «обратимости» различия. Нет никакой сущности, которая не была бы энергией, и нет никакой энергии, которая не была бы сущностью, но, однако, сущность и энергия всегда различны (и это различие параконсистентно).

Определение (17.1) также позволяет обсуждать тождество и различие энергий и ипостасей — одну из главных проблем для византийского богословия, начиная с эпохи Фотия Великого и особенно после Никифора Влеммида, то есть того времени, когда полемика о *Filioque*, уже безотносительно к латинянам, спровоцировала внутривизантийскую триадологическую полемику. Повод к ней подало тождество между ипостасями и энергиями, которого не может не быть, коль скоро имеется, с одной стороны, тождество между энергиями и сущностью и, с другой стороны, тождество между сущностью и ипостасями. Соответственно этому, в формуле (17.1) случай трех ипостасей является частным случаем из числа R элементов, возможных в правой части выражений, связанных конъюнкцией. Но (17.2) определяет такое множество, которое, как мы увидим, подчиняется аксиоме регулярности, или фундирования (см. ниже, п. 19), и поэтому отличие ипостасей от энергий в нем обозначены резко: множество ипостасей и множество энергий оказываются разными множествами одного и того же семейства множеств, так что ипостаси не являются членами множества энергий.

- 18. Троичность как основание бесконечных множеств.** Второй элемент упорядоченных пар в (17.1) всегда принадлежит некоему множеству членов, связанных строгой эксклюзивной дизъюнкцией. Элементарным звеном такой дизъюнкции является триада, где все три элемента равны, то есть равным образом предпочтительны по отношению к выбору для установления связи в упорядоченной паре. Таким образом, можно сказать, что все члены бесконечного множества энергий не просто являются сущностью «экстенционально», то есть «состоят из» сущности и исключительно из нее, но и несут в себе свойство троичности.

В традиционном богословском языке это выражается как принадлежность каждой энергии всем трем ипостасям Троицы или как присутствие всей Троицы во всех трех ее ипостасях в каждой из энергий.

Каппадокийская триада, в отличие от ее субординированных прототипов, неоплатонистических и христианских, содержит эту новую для тогдашней логики интуицию — понимание эксклюзивной дизъюнкции как отдельного от обычной эксклюзивной дизъюнкции логического коннектива.

Что касается самой параконсистентности логики Каппадокийцев, то новизну ее не следует преувеличивать, так как она была наследницей не только древнегреческих философских традиций, но и восточных...

Использование строгой эксклюзивной дизъюнкции вместо обычной имплицитно подразумевает другое понимание бесконечности, нежели то, что сложилось в современной логике после Кантора (основанное на упорядоченных парах и, далее, на понятии порядкового числа, от которого далее определяется понятие кардинального числа как мощность соответствующего множества). При строгой эксклюзивной дизъюнкции возникает другое понимание «порядкового» числа: оно теперь принадлежит абсолютно симметричному множеству порядковых чисел, где возможен любой выбор порядка как нарушение симметрии. Это бесконечность без образования пар в смысле обычных аксиом или теорем разных теорий множеств, или, что то же самое, с образованием параконсистентных пар. Насколько мне известно, в современных параконсистентных теориях множеств и параконсистентной математике такие объекты пока не рассматривались, хотя, возможно, это имело бы смысл.

19. **Аксиома фундирования (регулярности).** Покажем теперь связь между единичностью, троичностью и множественностью единого Бога более формально.

В обычных теориях множеств существует запрет для множества быть членом самого себя, формулируемый как аксиома фундирования:

$$(19.1) \quad \forall a [a \neq \emptyset \rightarrow \exists b (b \in a \wedge a \cap b = \emptyset)],$$

где $a \cap b = \emptyset$ понимается с учетом аксиомы экстенциональности, то есть в том смысле, что

$$(19.2) \quad a \cap b = \emptyset \leftrightarrow \forall c (c \in b \rightarrow c \notin a)$$

Словами: в любом непустом семействе множеств a есть такое множество b , ни один из элементов которого не принадлежит семейству множеств a . Смысл этой аксиомы в том, что никакое множество не может быть членом самого себя, и что не может быть такой бесконечной последовательности множеств, в которой хотя бы один предшествующий элемент включал бы себя последующий. Иными словами, не может быть такой бесконечной последовательности (a_n) , в которой (a_{i+1}) было бы членом (a_i) для любого i (этот результат доказывается не только для натуральных i и n , но и для бесконечных нестандартных натуральных чисел фон Неймана):

$$(19.3) \quad \forall i [(a_{i+1}) \in (a_i) \rightarrow \neg \exists (a_n)]$$

Последний результат был сформулирован в 1917 г. Миримановым как аксиома регулярности и затем в 1925 г. был внесен фон Нейманом в аксиоматику теории Цермело-Френкеля, что принял сам Цермело в 1930-м. Аксиома регулярности уже в формулировке Мириманова позволяет отличать множества упорядоченные от неупорядоченных (т.к. она сама и задает порядок). Та же аксиома в формулировке фон Неймана позволяет ввести понятие ранга множества, которое соответствует i в (19.3).

Запрет для множества быть членом самого себя смягчен в теории множеств Куайна (так наз. NF = New Foundations), где для синглтона постулируется его тождество его единственному элементу самого себя: $a = \{a\}$, так называемый «атом Куайна»), но параконсистентные свойства этого допущения в теории Куайна остаются неосознанными (ср. критику Дэвида Льюиса...), т.к. он выстраивает остальную теорию так, как будто она консистентна.

В параконсистентных теориях множеств, напротив, типично допущение множеств, которые являются членами самих себя. Разумеется, в рассматриваемой здесь триадологии, где вся полнота божества присутствует и в каждой из ипостасей, и в каждой из энергий (т.е. где Бог разделяется неразделимо), данное свойство параконсистентных множеств должно рассматриваться как тривиальное.

Менее тривиальным является тот факт, что по отношению к бесконечным множествам рассматриваемой триадологии имеет место некоторый аналог аксиомы регулярности и аксиомы фундирования.

Эти множества имеют только три ранга: единица, троика и множество (R), что соответствует рангу первому, второму и третьему. Это исчерпывающий список. Никаких промежуточных рангов нет (например, двоицы, четверицы или таких множеств, которые могли бы быть подмножествами множества энергий).

Единица является основанием троики в том смысле, что божественная сущность не является членом множества ипостасей. Троика является основанием множества в том смысле, что члены множества ипостасей не являются членами множества энергий (логосов).

В то же время, единица, троика и множество (R) энергий образуют некую единую последовательность множеств. Количество логосов в этом множестве логосов (R) таково, что, по причине особых свойств строгой эксклюзивной дизъюнкции, образует последовательность, начинающуюся только от трех, но не от двух и не от одного.

Отсутствие в божественной сущности субординации выражено через троичность как «фундирование» божественной множественности.

Особые божественные свойства, со строгой эксклюзивной дизъюнкцией не связанные, тут проявляются только в том, что все промежуточные значения между 3 и R в этой последовательности отсутствуют.

Можно также заметить, что троичность и единичность, с одной стороны, и множественность и троичность, с другой стороны, образуют разные семейства множеств, каждое из которых имеет свое собственное фундирование, — соответственно, 1 и 3.

20. Πάλιν, ὅτι μὲν ἐστὶ πηγαῖα θεότης ὁ πατήρ, ὁ δὲ υἱὸς καὶ τὸ πνεῦμα τῆς θεογένου θεότητος, εἰ οὕτω χρή φάναι, βλαστοὶ θεόφυτοι καὶ οἷον ἄνθη καὶ ὑπερούσια φῶτα, πρὸς τῶν ἱερῶν λογίων παρελήφαμεν (DN 2:7, p. 132, 645 B). – «И еще мы то восприяли от священных Речений, что Отец — источная божественность, а Сын и Дух — богородной божественности, если так можно сказать, ветви богонасажденные и как бы цветы и пресУщественные светы».